Exercices de probabilité

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles telle que $E(X^2) < \infty$.

(a) Montrer que $E(|X|) < \infty$.

(b) On rappelle que la variance de X est le nombre $Var(X) = E\Big((X - E(X))^2\Big)$. Montrer que $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

(c) Montrer que $(E(X))^2 \leq E(X^2)$.

(d) Montrer que la fonction $f(a) = E[(X-a)^2]$ atteint son minimum au point $a = E[X]$.

Exercice 2. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs réelles définies sur le même espace de probabilité. On suppose que $E(X^2) < \infty$ et $E(Y^2) < \infty$.

(a) Montrer que la fonction $f : a \mapsto E[(Y - aX)^2]$ est un polynôme de degré 2.

(b) Montrer que $f \geq 0$. En déduire que

$$(E(XY))^2 \leq E(X^2)\, E(Y^2).$$

(c) Montrer que

$$\sqrt{E[(X+Y)^2]} \leq \sqrt{E[X^2]} + \sqrt{E[Y^2]}.$$

Exercice 3. On suppose que la probabilité qu'un réacteur d'avion tombe en panne en cours de vol est p, où $0 < p < 1$, et ceci, indépendamment du comportement des autres moteurs de l'appareil.

On suppose qu'un avion peut encore voler si la moitié de ses moteurs fonctionnent. Vaut-il mieux voler en bimoteur ou en quadrimoteur ? (discuter suivant la valeur de p).

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$

(a) Calculer $P(X = j)/P(X = j - 1)$ pour $j \in \{1, \ldots, n\}$.

(b) En déduire une valeur de j pour laquelle la probabilité $P(X = j)$ est la plus grande.

Exercice 5. Soit P_1 et P_2 deux probabilités sur un espace mesurable $(\mathscr{X}, \mathcal{A})$. On définit l'application Q sur $\mathcal{A}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$Q(A) = \frac{1}{3}P_1(A) + \frac{2}{3}P_2(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Montrer que Q est une probabilité sur $(\mathscr{X}, \mathcal{A})$.
Soient X_1, X_2 et ξ trois variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité telles que X_1 est de loi P_1, X_2 est de loi P_2, ξ est de loi $\mathcal{B}(2/3)$. On suppose que ξ est indépendante de X_1 et indépendante de X_2. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = X_{1+\xi}$?

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles telle pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a

$$P(X \in A) = P(-X \in A).$$

On suppose de plus que $P(X = 0) = 0$.

(a) Quelle est la loi de la variable aléatoire $1_{\{X>0\}}$?

(b) Montrer que $|X|$ et $1_{\{X>0\}}$ sont des variables aléatoires indépendantes.

Exercice 7. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans l'ensemble $\{-1, 1\}$, et telles que

$$P(X = 1) = P(Y = 1) = 1/2.$$

On pose $Z = XY$.

(a) Déterminer la loi de Z.

(b) Montrer que X et Z sont indépendantes, et que Y et Z sont indépendantes.

(c) Les variables aléatoires X, Y, Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 8. Soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires à valeurs réelles, indépendantes et de même loi. On suppose que $E(X_1^2) < \infty$. On pose $\mu = E(X_1)$ et $v = Var(X_1)$. On définit les variables aléatoires

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2,$$

appelées respectivement moyenne empirique et variance empirique.

(a) Calculer $E(\bar{X})$.

(b) Montrer que si $i \neq j$ on a $Cov(X_i, X_j) = 0$. En déduire une expression simple de $Var(\bar{X})$.

(c) Montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 = V + (\bar{X} - \mu)^2.$$

(d) Calculer $E(V)$. En déduire l'espérance de $\widetilde{V}$ où

$$\widetilde{V} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \quad \text{(appelée variance empirique modifiée.)}$$